



UNIUNEA EUROPEANĂ



Instrumente Structurale
2014-2020

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin Programul Operațional Capital Uman 2014-2020

Axa prioritară 6: *Educație și competențe*

Prioritatea de investiții 10.i: *Reducerea și prevenirea abandonului școlar timpuriu și promovarea accesului egal la învățământul preșcolar, primar și secundar de calitate, inclusiv la parcursuri de învățare formale, nonformale și informale pentru reintegrarea în educație și formare*

Obiectivul specific 6.4: *Creșterea numărului de tineri care au abandonat școala și de adulți care nu și-au finalizat educația obligatorie care se reintorc în sistemul de educație și formare, inclusiv prin programe de tip a doua șansă și programe de formare profesională*

Obiectivul specific 6.6: *Îmbunătățirea competențelor personalului didactic din învățământul preuniversitar în vederea promovării unor servicii educaționale de calitate orientate pe nevoile elevilor și a unei școli inclusive*

Titlu proiect: *“Acces la programe de educație și formare profesională pentru tinerii și adulții din județul Dolj care au părăsit timpuriu școala (II)”*

Cod SMIS 2014+: 135712

MATERIALE DE PREDARE DISCIPLINA matematica

Modulul 4 “PROVOCĂRI MATEMATICE”

Unitatea de învățare I: DATE ȘI CERINȚE

Program „A doua șansă” pentru învățământ secundar inferior

Versiunea finală

A.3.1 Organizarea, monitorizarea și evaluarea programului „A doua șansă” și a stagiilor de pregătire practică de 720 de ore

Nume prenume: Ungureanu Cristina
Expert curriculum matematica

iunie 2023

Conținutul acestui material nu reprezintă în mod obligatoriu poziția oficială a Uniunii Europene sau a Guvernului României

UNITATEA I DATE ȘI CERINȚE

Mulțimi și puțină logică

- Ipoteză și concluzie
- Deducția și inducția
- Logica de toate zilele

Mulțimea este un ansamblu bine definit de obiecte, considerat ca un întreg. Obiectele individuale dintr-o mulțime sunt numite *elemente*. Elementele unei mulțimi pot fi de orice natură: numere, litere ale alfabetului, simboluri grafice, persoane, alte mulțimi etc.

Prin convenție, mulțimile sunt notate cu majuscule cursive: A, B, C etc.

Două mulțimi A și B se numesc egale sau identice, și aceasta se notează $A = B$, dacă dețin (sunt formate din) aceleași elemente.

O mulțime pot fi descrisă în cuvinte, cum ar fi:

A este mulțimea primelor patru numere naturale nenule pare.

O mulțime poate fi definită scriind explicit elementele sale între acolade, de exemplu:

$A = \{2, 4, 6, 8\}$.

O mulțime pot fi descrisă printr-o diagramă Vann-Euler.

O mulțime pot fi prezentată cu ajutorul proprietății caracteristice a elementelor mulțimii folosind o notație matematică. De exemplu:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 10, x = \text{număr par}\}$.

Conceptul care descrie dacă un obiect este sau nu element al unei anumite mulțimi (altfel spus, dacă îi aparține sau nu) este notat cu simbolurile \in și respectiv \notin .

Astfel, considerând mulțimea definită mai sus: $2 \in A$; $5 \notin A$.

Cardinalul unei mulțimi reprezintă numărul de elemente. Mulțimea descrisă mai sus are un număr bine definit și finit de elemente. Mulțimea de mai sus are patru elemente.

$\text{Card } A = 4$

Mulțimea al cărui cardinal este 0 se numește mulțimea vidă, ϕ .

$\text{Card } \phi = 0$

Există și mulțimi infinite, ca de exemplu: mulțimea numerelor naturale (\mathbb{N}), mulțimea numerelor întregi (\mathbb{Z}), mulțimea multiplilor unui număr natural, etc.

Dacă fiecare membru al mulțimii A este și membru al mulțimii B , atunci A se spune că este **submulțime** a lui B , și se scrie că $A \subset B$, citit și *A este inclus în B*. Echivalent, putem scrie $B \supset A$, citit *B include A*.

Dacă A este o submulțime a lui B , dar nu este egală cu B , atunci A se numește **submulțime proprie** a lui B , ceea ce se scrie $A \subset B$ sau $B \supset A$.

$$\{1,3\} \subset \{1,2,3,4\}$$

$$\{1,2,3,4\} \subseteq \{1,2,3,4\}$$

Mulțimea vidă este o submulțime a tuturor mulțimilor și orice mulțime este o submulțime a ei însăși:

- $\phi \subseteq A$
- $A \subseteq A$

Reuniunea a două mulțimi A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin fie mulțimii A , fie mulțimii B (scrise o singură dată). Se notează astfel:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

Intersecția a două mulțimi A și B este mulțimea elementelor comune celor două mulțimi. Se notează astfel:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ și } x \in B\}$$

Diferența $A - B$ este mulțimea elementelor care aparțin mulțimii A , dar nu aparțin mulțimii B . Se notează astfel:

$$A - B = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}$$

Exemplu:

Se consideră mulțimile:

$$A = \{x | x \text{ este număr natural și } 4 \leq x \leq 10\}$$

$$B = \{y | y \text{ este număr natural par și } 2 < y < 15\}.$$

Aflați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.

Rezolvare:

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$B = \{4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

$$A \cup B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14\}$$

$$A \cap B = \{4, 6, 8, 10\}$$

$$A - B = \{5, 7, 9\}$$

$$B - A = \{12, 14\}.$$

Propoziția este un enunț care poate să fie adevărat sau fals. Proprietatea unei propoziții p de a fi adevărată sau falsă se numește valoarea de adevăr: $v(p)$

Exemple: "un pătrat are laturile egale", "120 se împarte exact la 5", "3 > 7".

Toate aceste enunțuri sunt propoziții, pentru că putem preciza despre fiecare dacă este adevărată sau falsă

Dacă propoziția este adevărată scriem $v(p) = 1$, dacă propoziția este falsă scriem $v(p) = 0$.

Observație: 0 și 1 sunt aici simboluri fără înțeles numeric.

Vom nota propozițiile cu p , q , r sau cu p_1 , p_2 , p_3 , ...

Operații elementare cu propoziții

Negația propoziției p este propoziția $\text{non } p$, care este adevărată când p este falsă și este falsă când p este adevărată.

p	$\text{non } p$
1	0
0	1

Disjuncția propozițiilor p respectiv q , p sau q ($p \vee q$), este adevărată dacă cel puțin una din propoziții este adevărată.

p	q	$p \vee q$
1	0	1
0	1	1
1	1	1
0	0	0

Conjuncția propozițiilor p respectiv q , p și q , este adevărată dacă ambele propoziții sunt adevărate .

p	q	$p \wedge q$
1	0	0
0	1	0
0	0	0
1	1	1

Implicația propozițiilor p respectiv q , este propoziția p implică q , este falsă dacă p este adevărată și q este falsă, în rest este adevărată.

p	q	$p \rightarrow q$
1	0	0
0	1	1
0	0	1
1	1	1

Echivalența propozițiilor p respectiv q , este propoziția p echivalent cu q , este adevărată dacă ambele propoziții sunt adevărate sau ambele false.

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	0	0
0	1	0
0	0	1
1	1	1

Distingem două tipuri de propoziții:

1) *Propoziție simplă* care comportă un singur subiect, un singur verb și un singur atribut.

Exemplu: ” numărul -10 este mai mic decât +1”

2) *Propoziție compusă*: propoziție obținută prin combinarea de propoziții simple cu ajutorul conectorilor logici: negație, conjuncție, disjuncție

Exemplu: ” ecuația $x^2 + 4 = 0$ are soluții în mulțimea numerelor reale” sau ”4 este pătrat perfect”

Predicat (propoziție cu variabile sau propoziție deschisă): propoziție a cărei valoare de adevăr depinde de valorile atribuite variabilelor. În definirea unui predicat trebuie precizată întotdeauna mulțimea parcursă de variabile.

Exemplu: ” ecuația $5x - 20 = 0$ are soluții în mulțimea numerelor reale”, este un predicat cu o singură variabilă care este adevărat pentru $x = 4$ sau este fals pentru orice altă valoare atribuită lui x ”

Observație: Mulțimea valorilor care atribuie variabilelor predicatului și conferă acestuia statut de propoziție adevărată se numește *mulțimea de adevăr* a predicatului respectiv.

Cuantificator existențial :

Propoziția ” există cel puțin un x , astfel încât $p(x)$ ” se numește propoziție existențială asociată predicatului $p(x)$.

Notație: $\exists p(x)$

Unde \exists se numește cuantificator existențial și se citește ” există cel puțin”

Cuantificator universal:

Propoziția ” oricare ar fi x din A , are loc $p(x)$ ” (A fiind o mulțime nevidă căreia îi aparține x) se numește propoziție universală asociată predicatului $p(x)$.

Notație: $\forall x \in A: p(x)$

Unde \forall se numește cuantificator universal și se citește ” oricare ar fi”

Ipoteza este definită ca o afirmație predictivă, care poate fi testată și verificată prin metoda științifică.

Ipoteza constituie un element de bază al procesului științific, pe care se sprijină întreaga dezvoltare a științei. Cunoașterea științifică, putem spune, are trei elemente

constitutive: problemele (ele reprezintă anumite „întrebări” cu privire la esența fenomenelor naturii, societății și gândirii), ipotezele care oferă soluții anticipative ale acestor probleme) și mijloacele (metodele) prin care aceste ipoteze sunt confirmate sau infirmate.

O ipoteză este o simplă propoziție care este pusă la încercare pentru a-i determina validitatea. Stabilește relația dintre o variabilă independentă și o variabilă dependentă. Caracteristicile ipotezei sunt descrise după cum urmează: ar trebui să fie clar și precis., trebui să coreleze variabile, trebui să fie în concordanță cu majoritatea faptelor cunoscute, trebui să poată fi testat, trebuie să explice, ceea ce pretinde că explică. În scopul cercetării, ipoteza este definită ca o afirmație predictivă, care poate fi testată și verificată prin metoda științifică. Obiectivul ipotezei este de a găsi soluția unei probleme date.

Deducția este un proces de inferență cu propoziții logice.

Procedura deductivă se poate aplica informațiilor asamblate în limbaje fenomenale, naturale, în limbaje specializate de tip matematic, sau în limbaje criptice, codificate de conținut.

Spre exemplu: cineva poate deduce o schimbare climatică observând și interpretând diferiți parametri naturali sau observând și interpretând comportamentul diferitelor viețuitoare sau un elev poate să deduce care sunt numerele divizibile cu 5 observând rezultatele împărțirii a mai multe numere naturale la 5.

Sub aspect logic deducția are structura: dacă A, atunci B.

Ipoteza nu este altceva decât o presupunere tentativă care poate fi testată prin metode științifice. Predicția este un fel de declarație făcută dinainte asupra a ceea ce se așteaptă să se întâmple în continuare, în succesiunea evenimentelor. O ipoteză este întotdeauna susținută de fapte și dovezi, dar predicțiile se bazează pe cunoștințele și experiența persoanei care le face, dar nici asta nu întotdeauna.

Inducția matematică constituie un mijloc important de demonstrație în matematică a propozițiilor (afirmațiilor) ce depind de argument natural.

Metoda inducției matematice constă în următoarele:

O propoziție (afirmație) oarecare $P(n)$, ce depinde de un număr natural n , este adevărată pentru orice n natural, dacă:

1. $P(1)$ este o propoziție adevărată;
2. Dacă $P(n)$ este o propoziție adevărată, când n se majorează cu o unitate, adică $P(n + 1)$ este adevărată.

Așadar, metoda inducției presupune două etape:

1. Etapa de verificare: se verifica dacă propoziția $P(1)$ este adevărată;
2. Etapa de demonstrare: se presupune ca propoziția $P(n)$ este adevărată și se demonstrează justetea afirmației $P(n + 1)$ (n a fost majorat cu o unitate).

Observație: În unele cazuri metoda inducției matematice se utilizează în următoarea formă:

Fie m un număr natural, $m > 1$ și $P(n)$ o propoziție ce depinde de n , $n \leq m$.

Dacă

1. $P(m)$ este adevărată;

2. $P(n)$ fiind o propoziție adevărată implica $P(n + 1)$ adevărată pentru $n \neq m$, atunci $P(n)$ este o propoziție adevărată pentru orice număr natural $n \neq m$.

Exemplul Sa se demonstreze următoarea egalitate:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Rezolvare.

Pentru $n = 1$ egalitatea devine $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1 = 1$, prin urmare $P(1)$ este adevărată.

Presupunem ca egalitatea din enunț este adevărată, adică are loc egalitatea:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2},$$

și urmează sa verificam daca $P(n + 1)$, adică:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 = \frac{(n + 1) \cdot [(n + 1) + 1]}{2} = \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2}$$

este adevărat.

Cum (se tine seamă de egalitatea din enunț)

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + (n + 1) = (n + 1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2}$$

Adică $P(n + 1)$ este afirmație adevărată.

Așadar, conform principiului inducției matematice egalitatea din enunț este adevărată pentru orice n natural.

APLICAȚII

1. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $1 \in \{1, 2, 3\}$; b) $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$; c) $2 \in \{1, 3, 7\}$;

d) $4 \notin \{1, 2, 3\}$; e) $0 \in \emptyset$; f) $\text{Card } \emptyset = 0$;

2. Fie mulțimea $A = \{0, 2, 3, 5\}$

Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții :

$3 \in A$ $1 \in A$ $4 \notin A$

$2 \notin A$ $5 \notin A$ $\{0, 2\} \subset A$

3. Precizați care din enunțurile de mai jos sunt propoziții și stabiliți valoarea lor de adevăr:

- a) ” În orice triunghi suma măsurilor unghiurilor este de 180° .”
- b) ” $4 + 9 = 13$ ”
- c) ” $-10 > 2$ ”
- d) ” Afară plouă! ”
- e) ” Pătratul este un paralelogram. ”
- f) ” Unde mergi ? ”
- g) ” $[- 3,56] = - 3$ ”
- h) ” $[2, 5] = 2$ ”
- i) ” $\{-4, 64\} = 0, 64$ ”
- j) ” $\{1, 075\} = 0, 075$ ”
- k) ” Ecuația $[x] = 2$ are mulțimea soluțiilor $x \in [2, 3)$. ”
- l) ” Ecuația $[x] = -1$ are mulțimea soluțiilor $x \in [-1, 1)$. ”
- m) ” $|- 5| = 5$ ”
- n) ” $|+\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ ”
- o) ” Ecuația $|x| = 4$ are soluțiile $x = 4$ și $x = - 4$. ”
- p) ” Ecuația $|x| = - 6$ are soluțiile $x = - 6$ și $x = 6$. ”

4. Completați următorul tabel de adevăr:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	\bar{p}	\bar{q}
1	1						
1	0						
0	1						
0	0						

5. Stabilește, pe rând, valoarea de adevăr pe care o are fiecare propoziție și completați tabelul de adevăr asociat acestora:

a) p: $\left\{ \begin{array}{l} \text{” } [-1,46] = - 2 \text{ ”} \\ \text{” } [2, 5] = \frac{2}{5} \text{ ”} \\ \text{” } [4,6] = 4 \text{ ”} \\ \text{” } |- 2| = 2 \text{ ”} \end{array} \right. \Rightarrow \text{ tabelul de adevăr:}$

p	\bar{p}

b) Dacă p: ”Ecuatia $|x| = 4$ are soluțiile $x = 4$ și $x = -4$.”
q: ” $|-2| = 2$ ”,
completează tabelul de valori:

p	\bar{p}	$\bar{\bar{p}}$	\bar{q}	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$

c) Dacă p: ”Ecuatia $|x - 3| = 0$ are soluția $x = 3$.”
q: ” $4 + 7 > 13$ ”
completează tabelul de valori:

p	\bar{p}	$\bar{\bar{p}}$	\bar{q}	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$

6. Se consideră predicatul $p(x, y)$: „ $x + y = 7$ ”; $x, y \in \mathbb{Z}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor: i) $p(3, 4)$; ii) $p(2, -9)$; iii) $(\exists x) p(x, 2)$; iv) $(\forall y)(\exists x) p(x, y)$.

7. Să se determine elementele mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N}^* / x \leq 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leq x < 6\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ cifră pară}, x \leq 5\}.$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} / x = 2 \cdot n, n \in \mathbb{N}^*, n \leq 3\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} / 3^x \leq 81\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{N} / x = 2n - 1, 4 < n < 8\}$$

8. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{0, 2, 4\}$

Determină :

$$A \cup B =$$

$$A \cup C =$$

$$B \cup C =$$

$$A \cap B =$$

$$A \cap C =$$

$$C \cap B =$$

$$A - B =$$

$$A - C =$$

$$C - A =$$

$$B - A =$$

$$B - C =$$

$$C - B =$$

$$\text{Card } A =$$

$$\text{Card } B =$$

$$\text{Card } C =$$

9. Se dau mulțimile:

$$A = \{0, 1, 2, 3\};$$

$$B = \{1, 2, 4, 6\};$$

$$C = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Determină: a) $B \cup C$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus C$;
d) $(A \cup B) \setminus C$; e) $A \cup B \cap (A \cup C)$; f) Card B

10. Să se determine mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

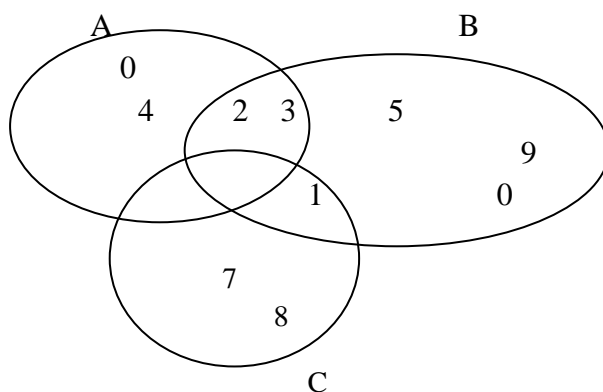
a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$;

b) $A \cap B = \{1, 7\}$;

c) $B \setminus A = \{2, 5\}$.

11. Determinați mulțimile A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $A - B$,

$B - C$, $C - A$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$, reprezentate prin diagramele de mai jos.



12. Se dau propozițiile p: „Orice paralelogram este romb” și

q: „Orice dreptunghi este paralelogram”.

Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:



p ; q ; \bar{p} ; \bar{q} ; $p \wedge q$; $p \vee q$; $p \rightarrow q$; $p \leftrightarrow q$.

13. Se consideră propoziția: “ $\exists x \in R, 4x - 5 < 3 + 6x$ ”; stabiliți-i valoarea de adevăr și a negației ei.

14. Se dau predicatul „ $x \in N, p(x)$ ”, respectiv: $p(x)$: „3 îl divide pe x ” și „ $x \in N, q(x)$ ”, respectiv: $q(x)$: „Ultima cifră a numărului 4^x este 6”.

Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

$p(2)$, $p(36)$, $p(135)$, $p(100)$, $p(300)$, $p(400)$, $q(420)$, $q(150)$, $q(500)$.

15. Se consideră predicatul $p(x, y)$: „ $x - 2y = 12$ ”, $x, y \in Z$. Stabiliți valorile de adevăr pentru propozițiile:

$p(-4, -8)$; $p(10, -1)$; $(\exists y)p(100, y)$; $(\forall x)(\exists y)p(x, y)$; $(\forall y)(\exists x)p(x, y)$; $(\exists x)(\forall y)p(x, y)$.

16. Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că pentru orice $n \in N^*$, are loc egalitatea:

a)
$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

b)
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

c) $a = 2^{4n} - 1$ este divizibil cu 5.